금융공학의 주요 이슈 소개

2009. 12. 2.

전인태
가톨릭 대학교 수학과 교수/금융공학 전공

파생상품의 출현

- 전통적으로 금융시장에서는 주식, 채권, 외환 등 기본적인 금융상품들이 거래되었음
- 이러한 기본적인 상품들은 배당, 이자율 등을 계산하는 정도의 쉬운 수학이 쓰였기 때문에 굳이 수학을 깊이 있게 전공한 사람을 필요로 하지는 않았음
- 그러나 미국과 유럽 등 선진 금융시장에 새로운 금융상품들이 출현하게 되면서 상황은 많이 바뀌게 됨
- 파생상품이라 불리는 금융상품 출현

위험에 관한 인식 변화

- 금융시장에서의 또 하나의 중요한 트랜드는 위험에 관한 인식 변화
- 어떤 금융기관의 투자담당 임원에게 당신의 회사에서 투자한 주식의 위험은 어느 정도 입니까? 라고 물었을 때
- '별로 위험하지 않습니다' 라고 대답했다면,
- 투자 손익에 매우 민감한 고객으로서는 매우 답답함을 느낄 것임

계량화

- 지금 날씨가 더운가요? 라고 물었을 때 '조금 더워요' 라고 말하는 것과 유사
- 온도에 아주 민감한 사람이라면 이러한 대답은 별로 도움이 되지 않을 것임
- 만일 '지금의 온도는 23.7도입니다' 라고 말해준다면 정교한 정보를 입수
- 이와 같이 어떤 대상을 숫자로 정교하게 나타내 주는 것을 계량화 한다고 말함

VAR

- 금융시장에도 위험을 나타내 주는 정교한 숫자가 등장하게 됨: VaR(Value at Risk)

- 주식에 투자한 투자의 위험이 얼마냐고 물었을 때, 온도가 23.7도라고 말하는 것처럼 'VaR 값이 6억 7천만원입니다'라고 대답한다면 '위험의 정도가 그 정도 되는구나' 라고 알게 됨

- 일반적으로 'VaR 값이 6억 7천만원이라는 말은 확률 99%로 앞으로 10일간 6억 7천만원 이상을 손해보지는 않는다는 말

VAR

- 총 투자액이 1,000억원 이었다면 10일 동안 최악의 경우 1%의 확률로 6.7억원을 손해보게 되므로 사람들은 별로 위험하다고 느끼지 않을 것임
- 그러나 만일 총 투자액이 10억원이었다면 6억 7천만원의 손실 가능성은 비록 1%이기는 하지만 매우 위험하다는 것을 알 수 있을 것임

계량화 과정

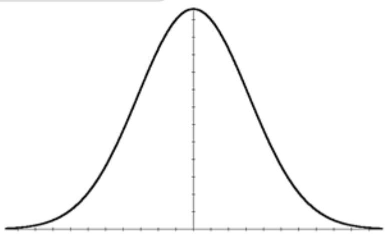
ㅇ 정성적 표현 → 정량적 표현(금융공학의 주요 역할 중 하나)

< 예시 >

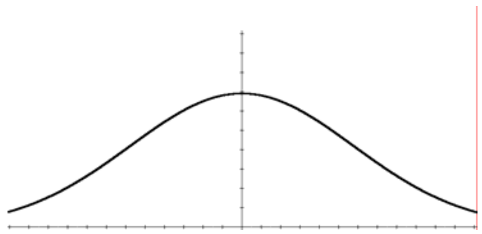
대상	정성적 표현	정량적 표현
기온	덥다, 춥다	온도(23℃)
투자포트폴리오 위험	안전자산, 위험자산	수익의 표준편차 VaR
상관관계	독립적이다, 종속적이다.	상관계수(ρ)

리스크

리스크와 수익분포

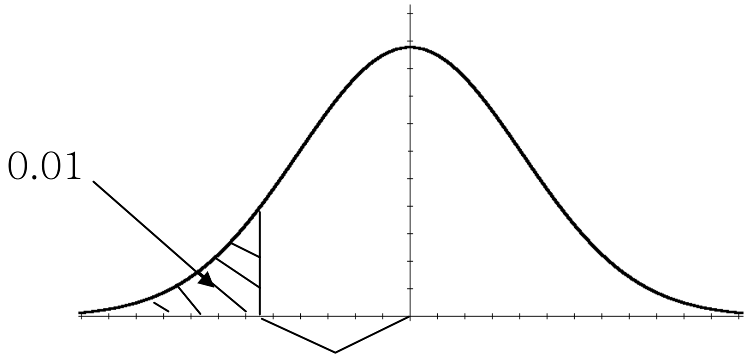


a. Risk 작은 경우(표준편차 작음)



b. Risk 큰 경우(표준편차 큼)

리스크 측정(VaR)



99% 확률로 K이상의 손실이 나지 않음

금융공학출현의 배경

- 이와 같은 위험의 계량화는 투자한 자산의 미래의 불확실성에 대한 정교한 이해를 가능하게 해주어 위험을 관리하는 매우 중요한 수단이 됨
- 그러나 금융기관의 엄청난 투자액과 여러 종류의 투자 상품으로부터 VaR 값을 구해내는 일은 쉬운 일이 아님
- 매우 어려운 수학과 컴퓨터 프로그래밍을 통한 시스템화가 필요
- 전문적인 수학지식과 수학 전공인력이 필요하게 되는 예

위험의 헤지

- 위험에 대한 체계적이고 계량적인 이해와 동반해서 발달해온 중요한 개념은 위험의 회피(헤지)
- 내가 보유하고 있는 금융자산의 가치가 미래에 떨어질 경우를 대비해서 위험을 줄이려는 것
- 위험을 무조건 줄인다고 좋은 것은 아님
- 예를 들어, 위험이 거의 없는 정기예금을 들어 놓게 되면 위험은 없는 대신 이자도 적어서 수익률이 떨어지게 되기 때문

파생상품의 출현

- 따라서 자기가 감당할 수 있는 위험 범위 내에서 수익을 극대화 할 수 있는 투자를 하게 됨

- 이를 위해서는 손쉽게 위험을 줄이거나 늘이거나 할 수 있는 방법이 필요

- 이러한 방법을 제공하는 것이 파생상품이며, 파생상품의 등장은 금융시장의 폭발적 성장을 가져오게 되는 주요 원인으로 작용

파생상품의 전형적인 예 : 옵션

- 어떤 투자자가 현재 주가가 10,000원인 주식 1억 원어치를 1년간 꼭 보유하고 있어야 한다고 가정
- 현재는 1억원
- 1년 후의 가치는 1억보다 훨씬 높을 수도, 낮을 수도 있음
- 미래의 가치가 불확실하므로 위험을 안고 있는 셈

옵션

- 만일 1년 후에 이 주식을 팔아서 9,000만원의 부채를 갚아야 한다면 주식가격이 9,000원 이하로 떨어지게 되면 문제가 발생
- 부채를 갚지 못해 자칫 신용불량자로 전락할 수도 있고, 기업의 경우는 부도가 날 수도 있음

옵션

- 만일 현재 갖고 있는 주식을 1년 후에 가격이 9,000원 이 하로 떨어지더라도 9,000원에 사주겠다는 사람이 나타났다면
- 투자자는 이러한 위험에서 해방
- 주가가 오르면 그 수익을 챙길 수 있고, 주가가 떨어지면 9,000원에 팔아버릴 수 있기 때문
- 이렇게 주식을 미리 정해진 가격으로 정해진 시점에 다른 사람에게 팔 수 있는 권리를 풋옵션이라 부름

옵션

- 이러한 풋옵션이 공짜일 리가 없음
- 처음 계약을 할 때, 위험이 없어지는 대가로 옵션프리미엄(옵션 가격)이라 부르는 현금을 A에게 지불해야 함
- 일종의 보험을 드는 셈이고 보험료를 지불해야 하는 셈
- 풋옵션과 반대로 정해진 가격에 살 수 있는 권리를 콜옵션이라 부름

다양한 옵션

- 1970년대 이후 폭발적인 거래
- 금융시장의 복잡한 위험형태와 이들을 회피하려는 시장의 수요에 따라 다양한 형태로 발전
- 배리어 옵션, 룩백 옵션, 아시안 옵션, 디지털 옵션 등 이색옵션이라 불리는 옵션
- 두 개의 주가와 연동되어 수익율이 결정되기도 하는 ELS 상품 등이 주가를 기초로 하는 파생상품

금융공학의 출현

- 옵션이라는 금융상품에 복잡하고 난해한 수학적 구조가 숨어있다는 사실을 알게 되면서 본격적인 금융공학이 태동
- 옵션에서 수학적인 첫번째 관심사는?
- 공정한 옵션프리미엄을 결정하는 일: 옵션을 얼마에 사고 팔아야 거래 쌍방 간에 공정한 계약이 되는 걸까 하는 문제
- 과거 데이터 등 이용해 주식가격이 어떻게 움직여 갈지 알게 되면 미래의 시점에서의 가격의 분포를 알 수 있게 되고, 옵션의 가격은 그때 주어질 이득의 기대값을 구해 현재의 가치를 구해주면 될 것이라는 직관적인 해답

아비트리지와 확률론

- 이러한 직관이 맞았다면 금융수학이라는 분야는 생겨나지 않았을지도 모름
- 이러한 방식으로 가격이 결정되면 아비트리지라 불리는 '전혀 위험이 없이 이득을 취할 수 있는 방법'이 있다는 사실을 알게 되면서 프리미엄 결정의 중요성을 인식하게 되었음
- 다행히 금융과는 전혀 별개로 발전되어온 확률론의 깊은 이론이 이에 대한 해답을 주게 되었음: 위험중립세상(마팅게일 이론)

채권과 이자율

- 금융시장에는 앞에서 설명한 주식이외에도 채권 및 외환 등 다양한 상품들이 거래
- 채권은 이자율을 결정해주는 매우 중요한 상품
- 주식을 사는 것은 회사의 주주 즉 주인이 되는 것
- 회사의 가치가 떨어지면 주가도 떨어지게 되어 손해가 발생하고 반대로 회사의 가치가 오르면 주가가 오름

채권과 이자율

- 채권의 경우는 이와 달리 회사에 돈을 빌려주는 것
- 따라서 회사의 가치와 상관없이 약속된 만기가 되면 빌려준 돈을 되돌려 받게 됨
- 중간중간에 쿠폰이라고 부르는 이자도 받음
- 이 경우 회사가 망해서 부도가 나면 돈을 돌려받지 못하게 되는데, 이를 신용위험이라고 부름

채권과 이자율

- 채권은 일반적으로 쿠폰이라는 형태의 이자를 지급하지만 편의상 쿠폰이 없다고 하면, 그 외에 채권에는 액면가와 만기가 적혀있음
- 어떤 회사가 발행한 채권(회사채)의 액면가가 백만원, 만기가 2010년 10월 1일이라면
- 채권의 소유자가 2010년 10월 1일에 채권을 발행한 회사를 찾아가 채권을 제시하면 회사는 백만원을 주어야 함

이자율

- 만일 2009년 10월 1일 현재 이 채권이 90만원에 거래되고 있다면 90만원에 구입하여 1년 후에 100만원을 받을 수 있으므로 10만원의 이자수입이 생기게 됨
- 이자율이 11.11%가 됨
- 그런데 이러한 채권이 시장에서 거래되고 있으므로 시간이 지나면서 가격이 변하게 되는데 채권 가격의 변화에 따라 이자율도 변하게 됨

이자율 파생상품

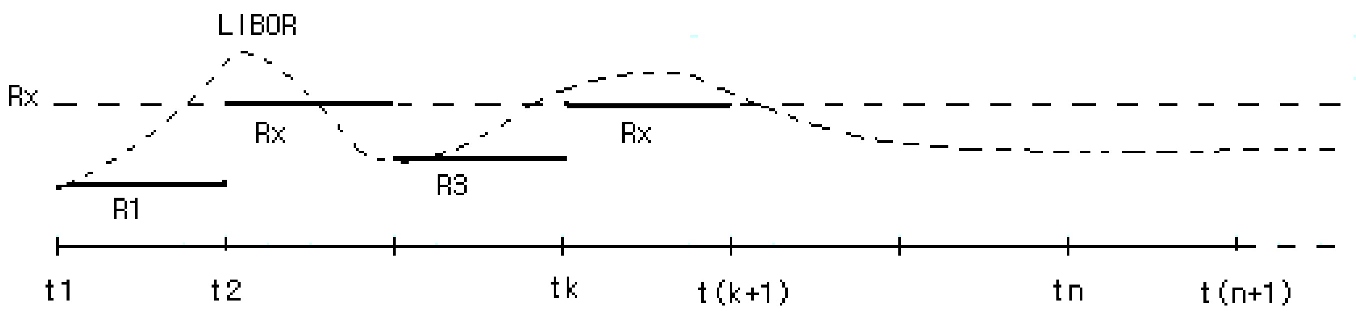
- 이자율이 변하게 되면 돈을 빌려준 사람이나 빌린 사람이 이익이나 손해를 보게 되는데 이에 따른 위험이 생기게 됨

<이러한 위험을 헤지하기 위한 파생상품>

- 채권 옵션: 채권의 가격을 기초로 하는 옵션
- 이자율 캡: 이자율이 올라갔을 때 정해진 한도 이하로만 이자를 지급하도록 하는 상품
- 스왑: 변동이자율을 고정이자율로 만들어 이자율의 등락에 따른 위험을 회피할 수 있도록 설계된 상품

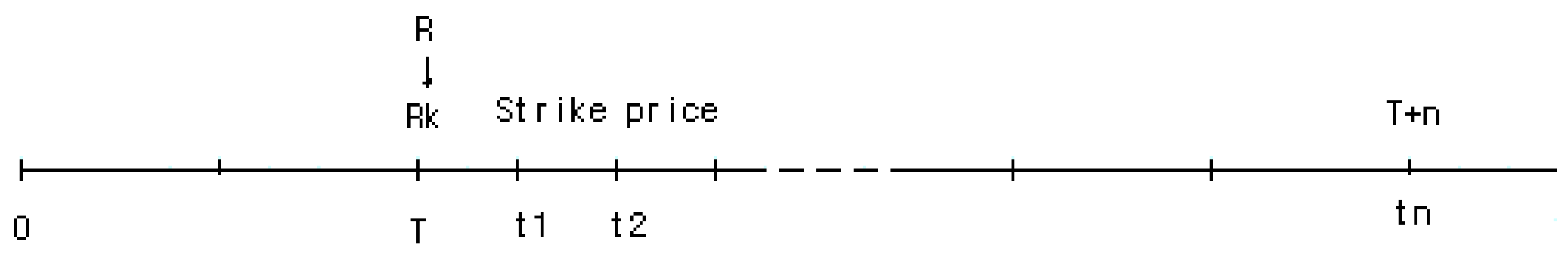
금리캡

- 금리캡은 변동금리가 일정수준이상으로 올라가는 경우에 대비해서 만들어진 이자율 옵션임.



스왑션

- 스왑션은 이자율 스왑에 관한 옵션으로, 옵션 소유자에게 만기시점에 미리 정해진 고정금리를 지급하는 형태로 스왑을 체결할 수 있는 권리를 제공하는 옵션임



신용파생상품

- 이외에도 회사의 부도위험에 대한 위험회피를 위해 신용파생상품이 거래
- 미국발 서브프라임 모기지 사태의 주범으로 꼽히고 있는 CDS(credit default swap), CDO 라는 상품 등이 신용파생상품의 중요한 예

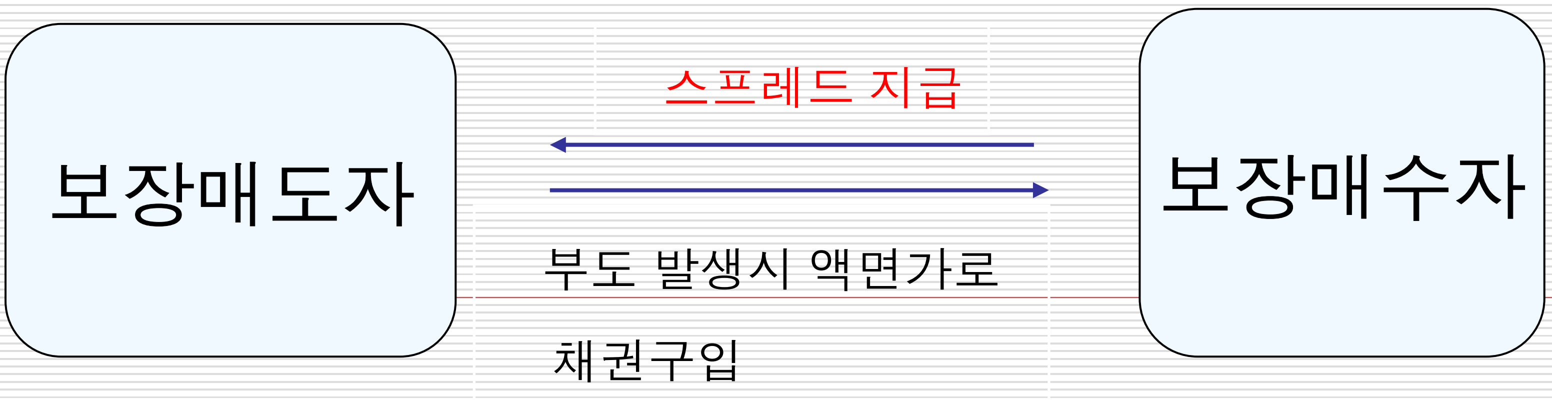
신용 파생상품 – CDS

신용위험(credit risk)은 부도가 발생함으로써 생기는 위험

- CDS는 보장매도자가 보장매수자에게 신용사건(부도)이 발생할 경우에 대비해 보험을 제공하는 계약

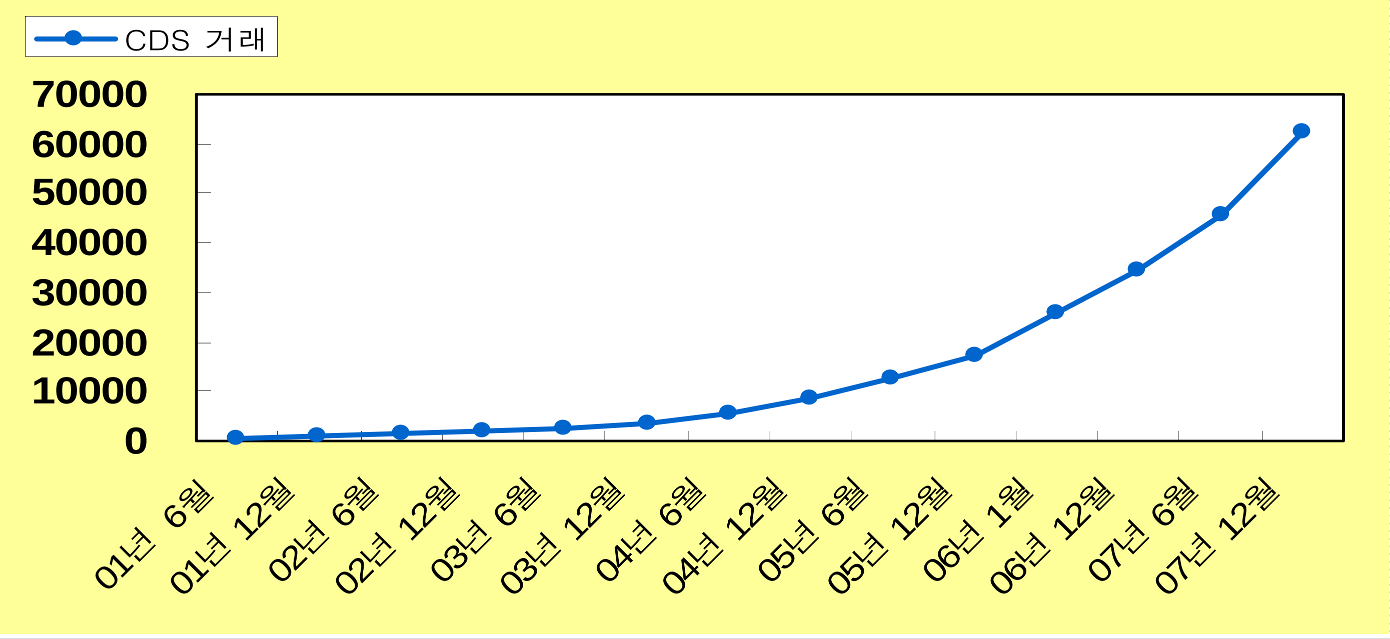
- 보장매수자는 신용사건이 발생했을 때 정해진 채권을 액면가에 매도할 수 있는 권리를 갖고, 보장매도자는 신용사건이 발생하면 그 채권을 액면가에 매입하기로 약정

- 보장매수자는 정해진 만기일까지 정기적으로 일정금액(CDS 스프레드)을 지불



신용 파생상품 - CDS

C D S 거래량



2007. 2H : 62,173 2008. 1H : 54,611

신용 파생상품 - CDO

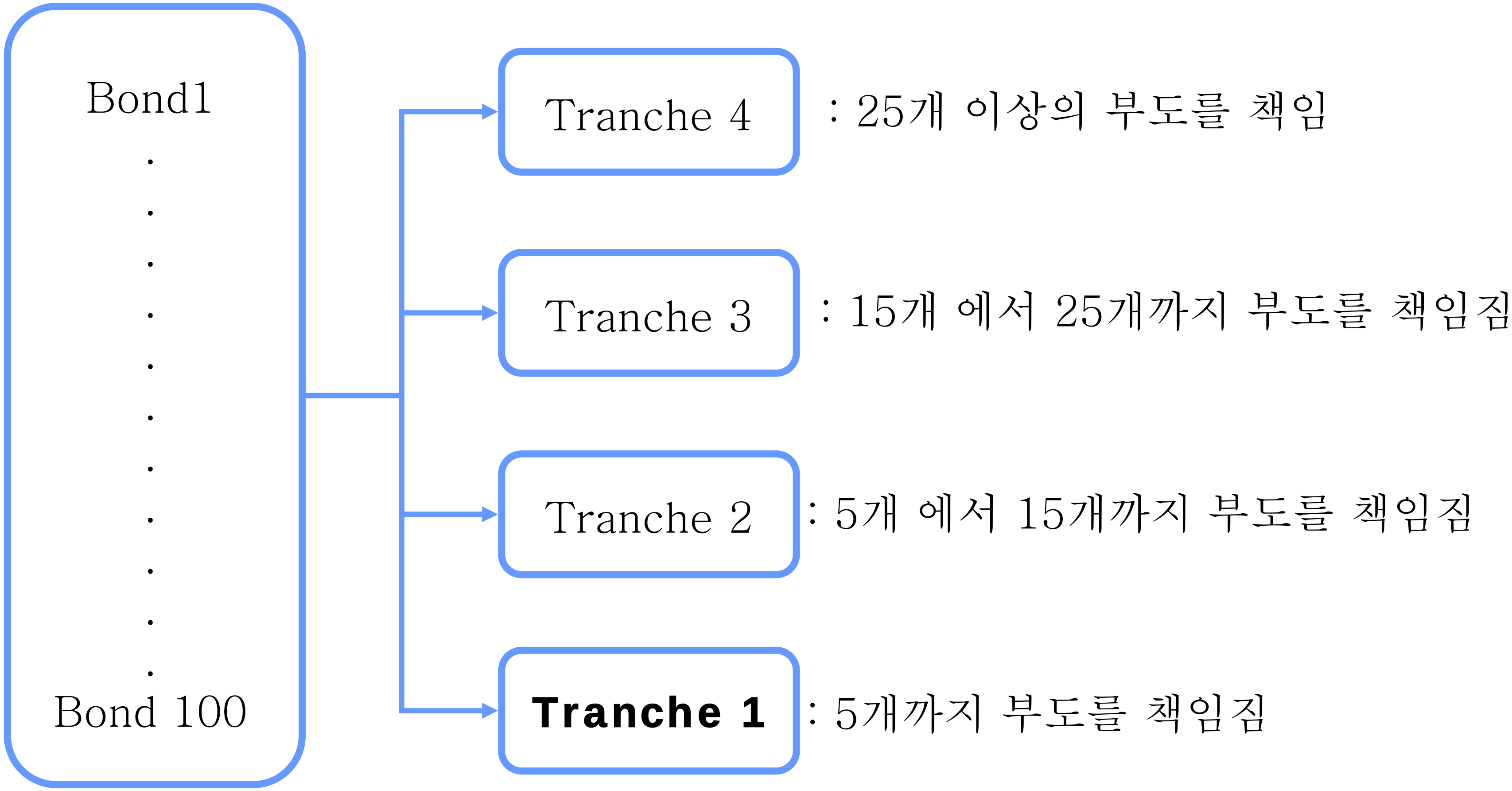
CDO는 채권집합을 이용하여 다양한 위험 속성을 갖는 증권을 발행하는 금융상품

CDO 발행자는 계층별 위험을 흡수하는 트랜치(tranche)라 불리는 증권을 발행

예를 들어

- 첫 번째 트랜치는 손실이 채권집합의 총 채권원금의 5%가 될 때까지의 모든 신용손실을 흡수
- 두 번째 트랜치는 총 채권원금의 5%에서 15% 사이의 신용손실을 흡수
- 세 번째 트랜치는 원금의 15%에서 25% 사이의 신용손실을 흡수
- 네 번째 트랜치는 원금의 25%를 초과하는 신용손실을 모두 흡수

신용파생상품 – CDO


Bond1
Bond 100
Tranche 4
: 25개 이상의 부도를 책임
Tranche 3
: 15개 에서 25개까지 부도를 책임짐
Tranche 2
: 5개 에서 15개까지 부도를 책임짐
Tranche 1
: 5개까지 부도를 책임짐

신용파생상품 – CDO

Tranche 1 투자

(편의상 부도는 시작하자마자 일어난다고 가정)

예) 투자금액 : 100억

만기 1년

이자율 50%

1년 후

부도가 없는 경우 : 100억 + 50억 = 150억

부도가 1개 있으면 : 80억 + 40억 = 120억

.

.

.

부도가 5개 있으면 : 0

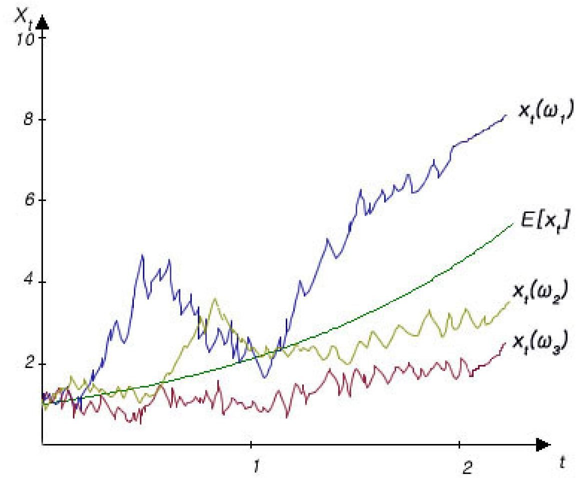
파생 금융 상품

기초자산	파생상품
○ 주식 ○ 채권 – 이자율 – 부도관련 ○ 외환	○ 선물, 옵션, ELS 등 ○ 채권옵션, 캡, 플로어, 스왑션, 구조화 채권 등 ○ 신용파생(CDS, CDO, CLN 등) ○ 선물환, KIKO, Snowball 등
○ 에너지, 상품	○ 에너지파생, 상품선물 등

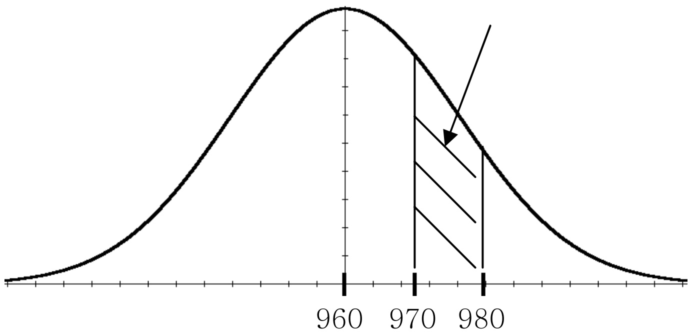
파생상품관련 주요이슈 : 가격 결정 및 헤징

파생상품 가격 결정

- 기초자산(주식, 환율 등)의 dynamic을 수학적으로 모델링함
- 만기시점에서의 환율의 확률 분포 예측 (위험중립세상)
- 수익의 확률분포 계산
- 기대수익의 현재가격 산출 → 공정가격



예) 주가가 970에서 980 사이의 확률



주식, 환율 등의 움직임을 나타내는 수학적 모델

Dynamics

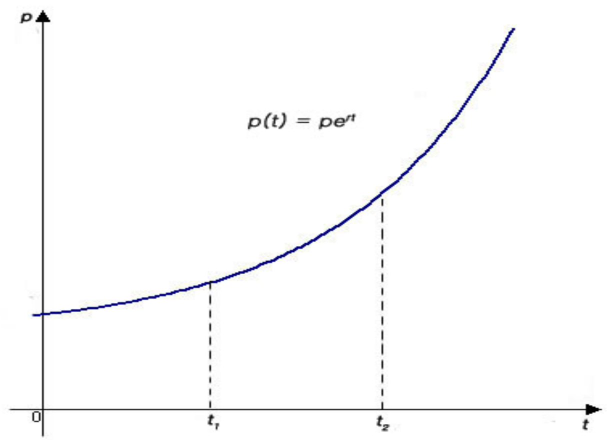
시간의 변화에 따라 움직이는 대상을 수학적으로 표현

방정식 : 상미분 방정식, 편미분 방정식

Deterministic Dynamics

○ 주가나 환율이 주어진 형태의 미분방정식을 따르는 경우, 그림에서 보는 바와 같이 미래 어느 시점에서의 값이라도 현재시점에서 구할 수 있음.

○ 모든 미래의 상황이 유일하게 정해지므로 결정적 과정이라고 함.

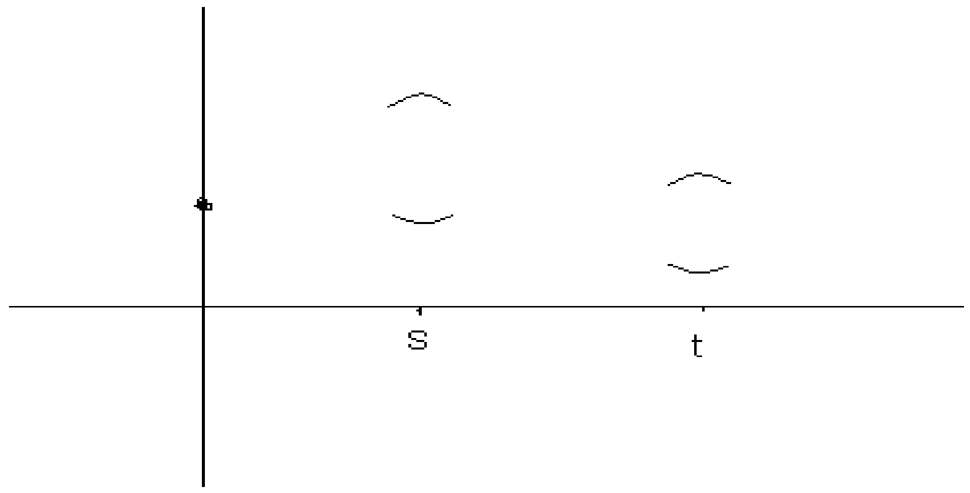


<결정적 과정>

Stochastic Dynamics

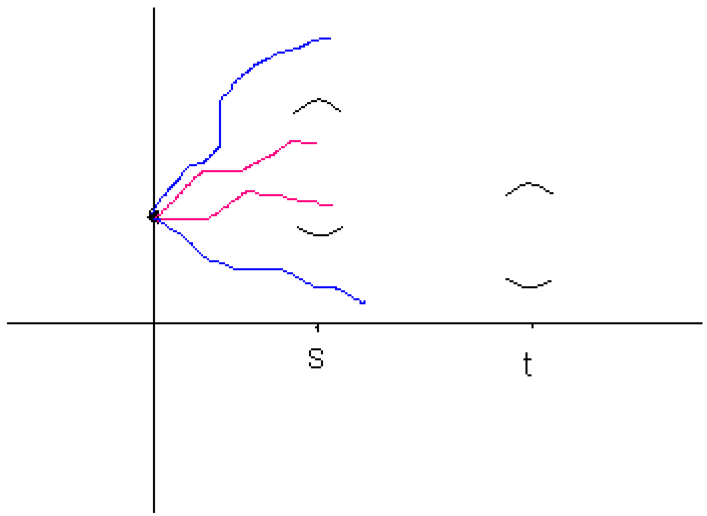
어떤 시간에 어떤 위치(혹은 지역)에 있을 확률을 알려줌

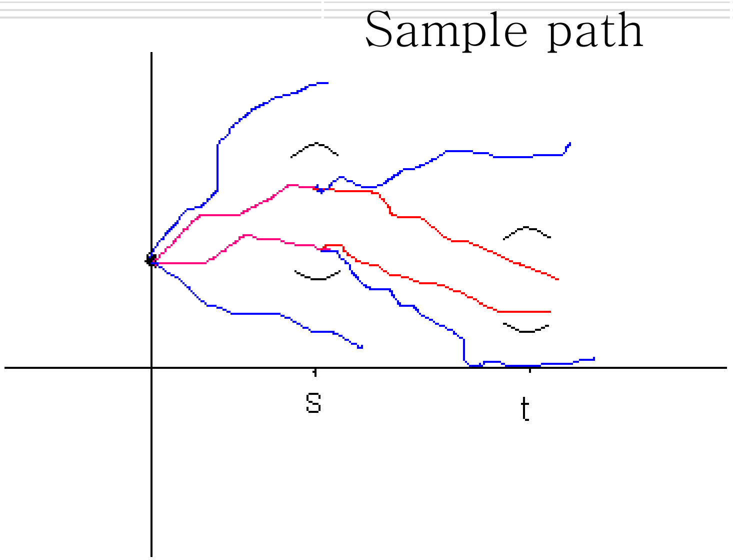
continuous time, discrete time



Stochastic Dynamics

어떤 시간에 어떤 위치(혹은 지역)에 있을 확률을 알려줌 : 확률과정





기초자산 가격의 움직임을 나타내는 수학적 모델

기본개념

- 파생상품에 관한 내용을 이해하기 위해서는 확률과정에 대한 이해가 필수적임.
- 주가, 이자율 등 기초적인 금융 변수들이 확률과정을 따른다고 가정하기 때문
- 확률과정과 결정적 과정은 모두 동적 과정(dynamic process)의 일종
- 동적 과정은 어떤 대상이 시간에 따라 변해가는 모습을 수학적으로 모델링한 것

확률과정 예시

랜덤 워크(random walk)

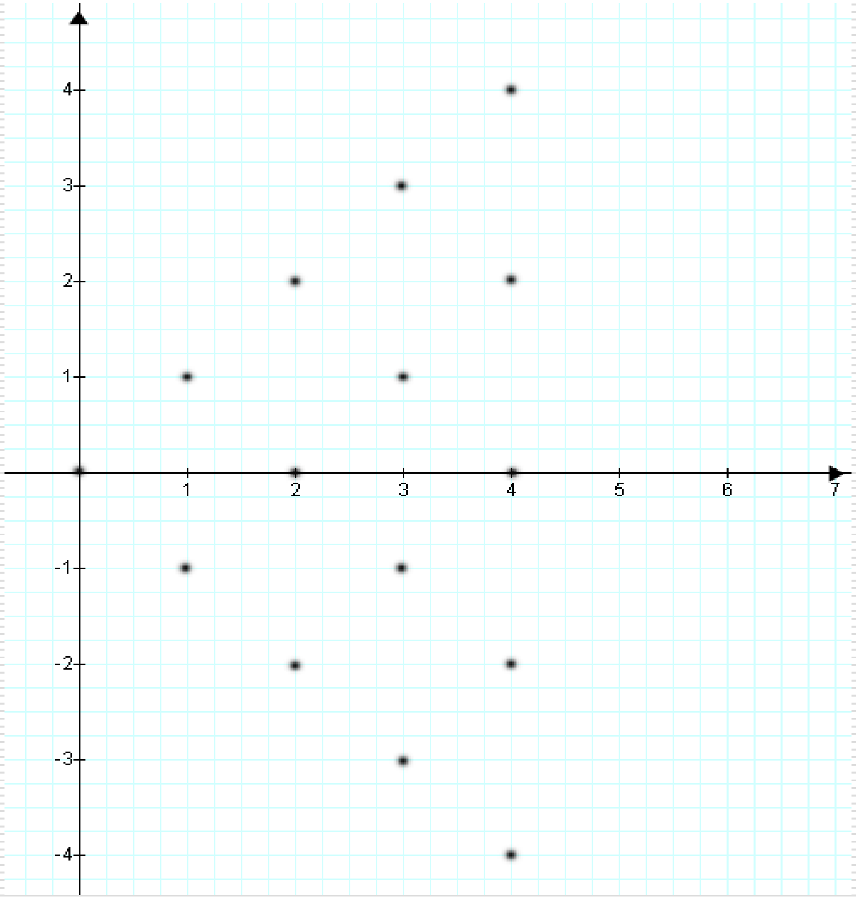
- 이산 시간에서의 가장 기본적인 확률 과정은 랜덤 워크임.
- 동전을 던져서 앞이 나오면 한 칸 앞으로 가고 뒤가 나오면 한 칸 뒤로 가는 단순한 동작의 반복을 수학적으로 모델링한 것
- 확률 변수 X를 다음과 같이 정의

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega = H \\ -1 & \text{if } \omega = T \end{cases}$$

Def) 다음과 같이 정의된 $\{S_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 을 랜덤 워크(random walk)라 한다.

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

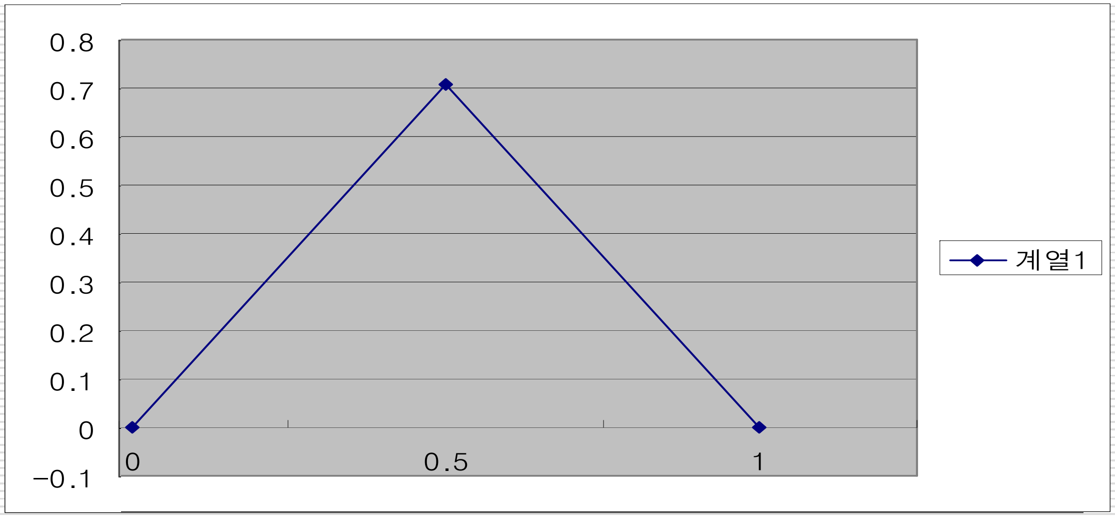
$$S_0 = 0$$



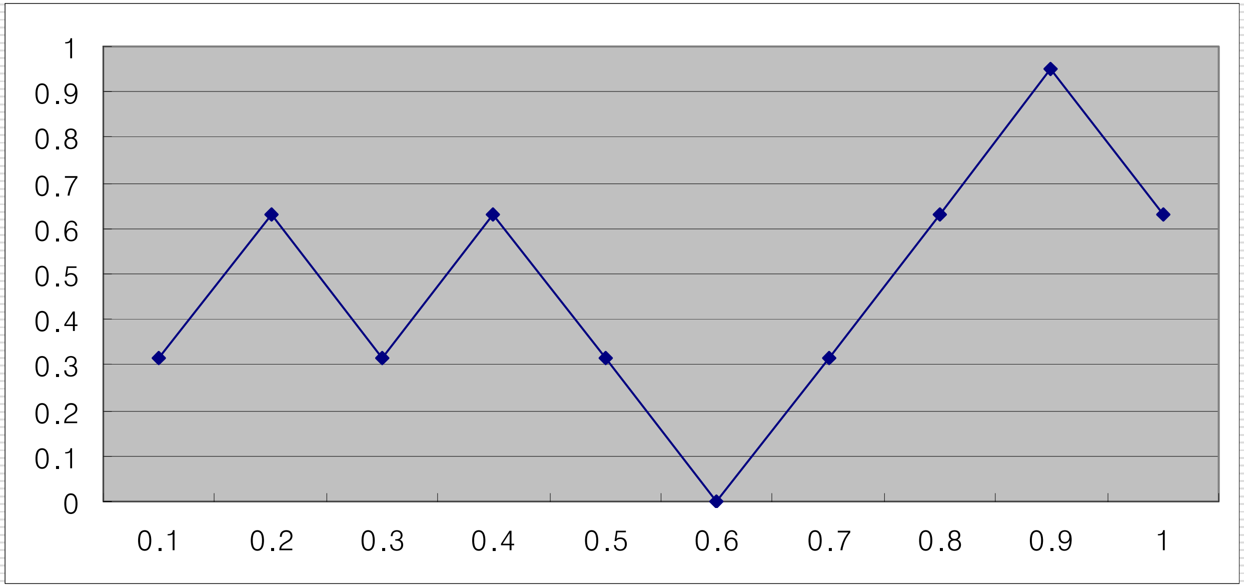
브라운 운동(Brownian Motion)

- 랜덤 워크의 각 경로(path)를 그림과 같이 직선으로 연결하여 연속시간에 의한 다이내믹으로 바꾸어 줄 수 있음.
- 확률과정 S_t^n 라 하면, 시간이 $1/n$, 공간이 $1/\sqrt{n}$ 만큼 축소된 새로운 확률과정

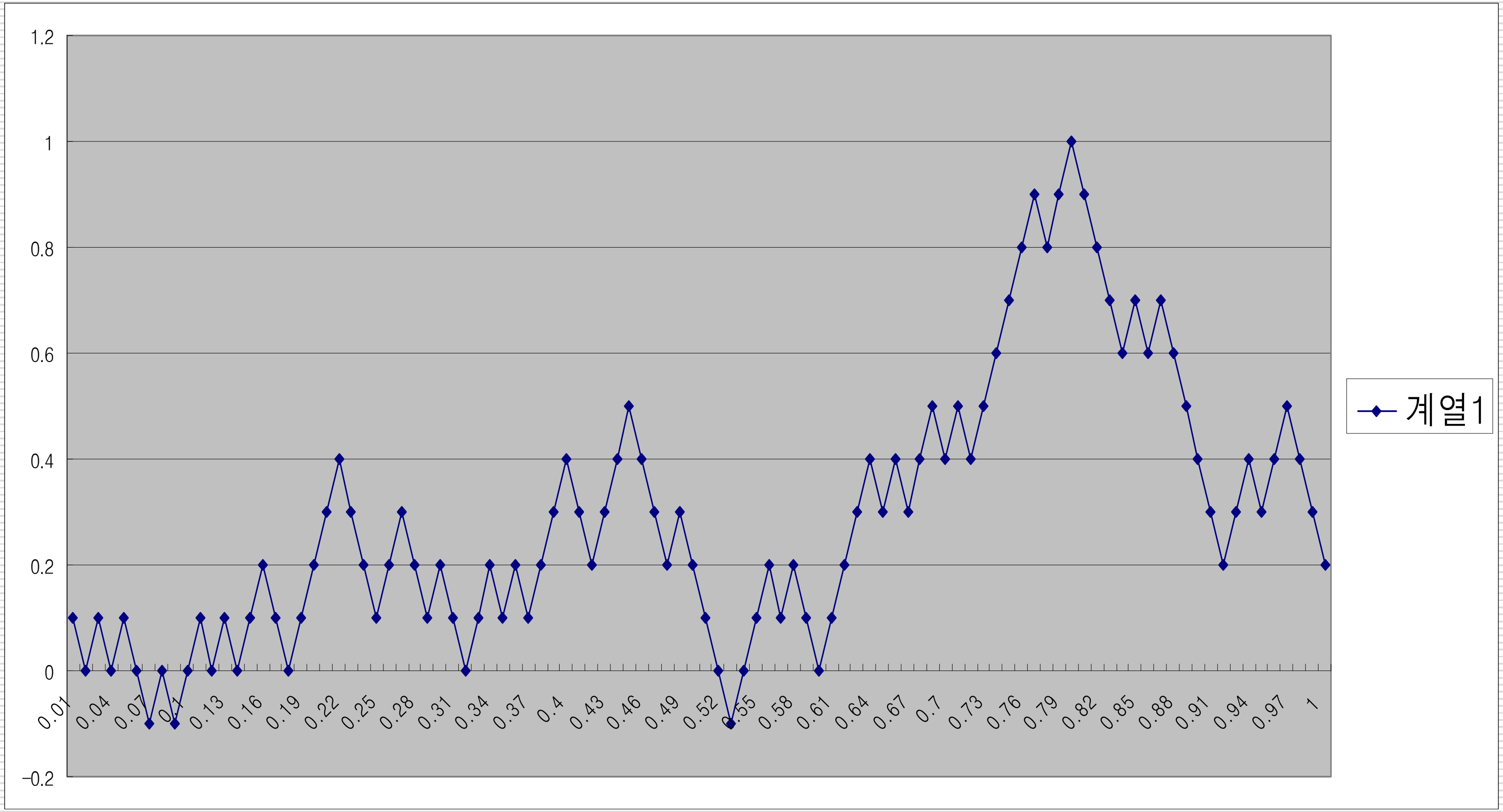
n=2



n=10

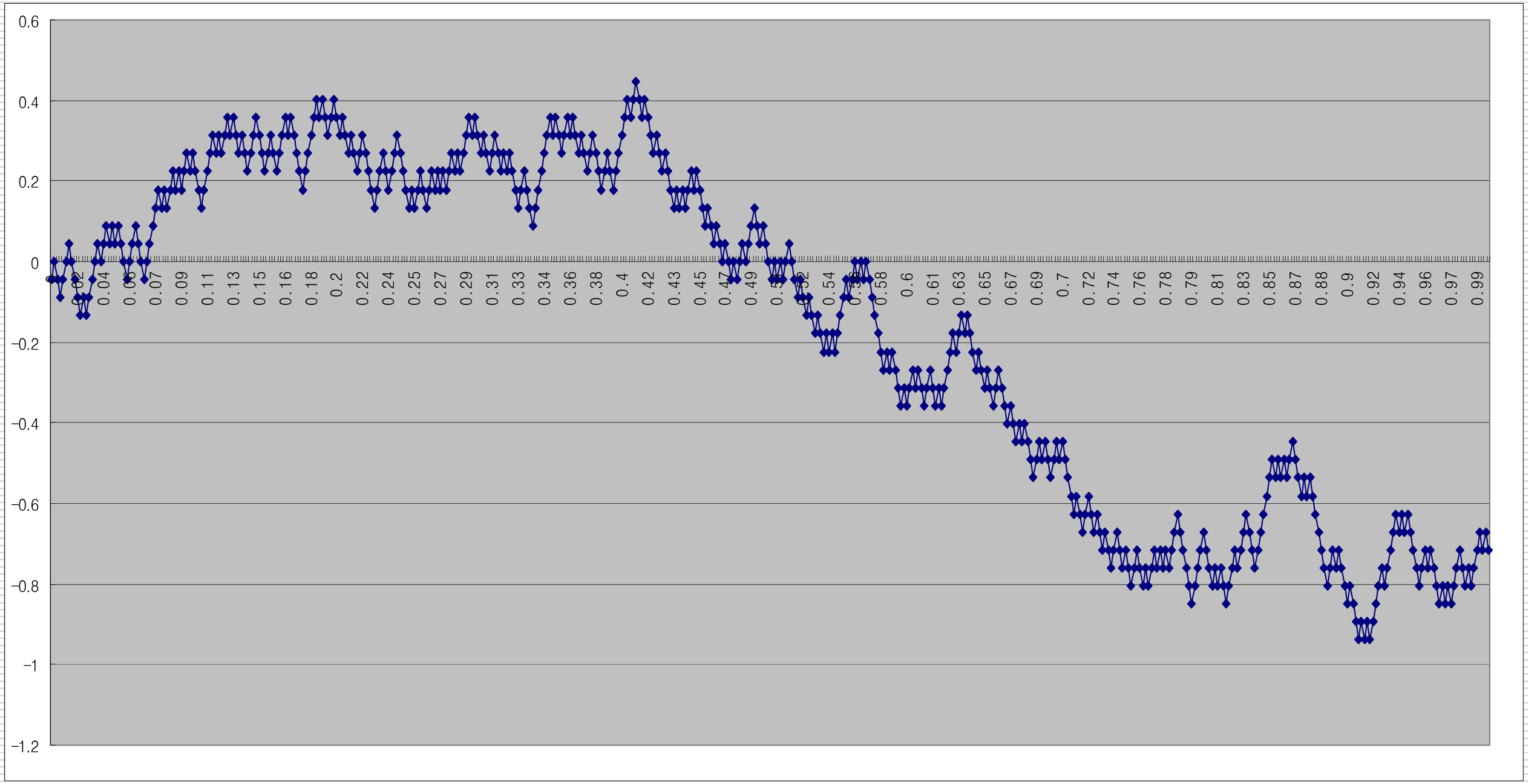


n=100

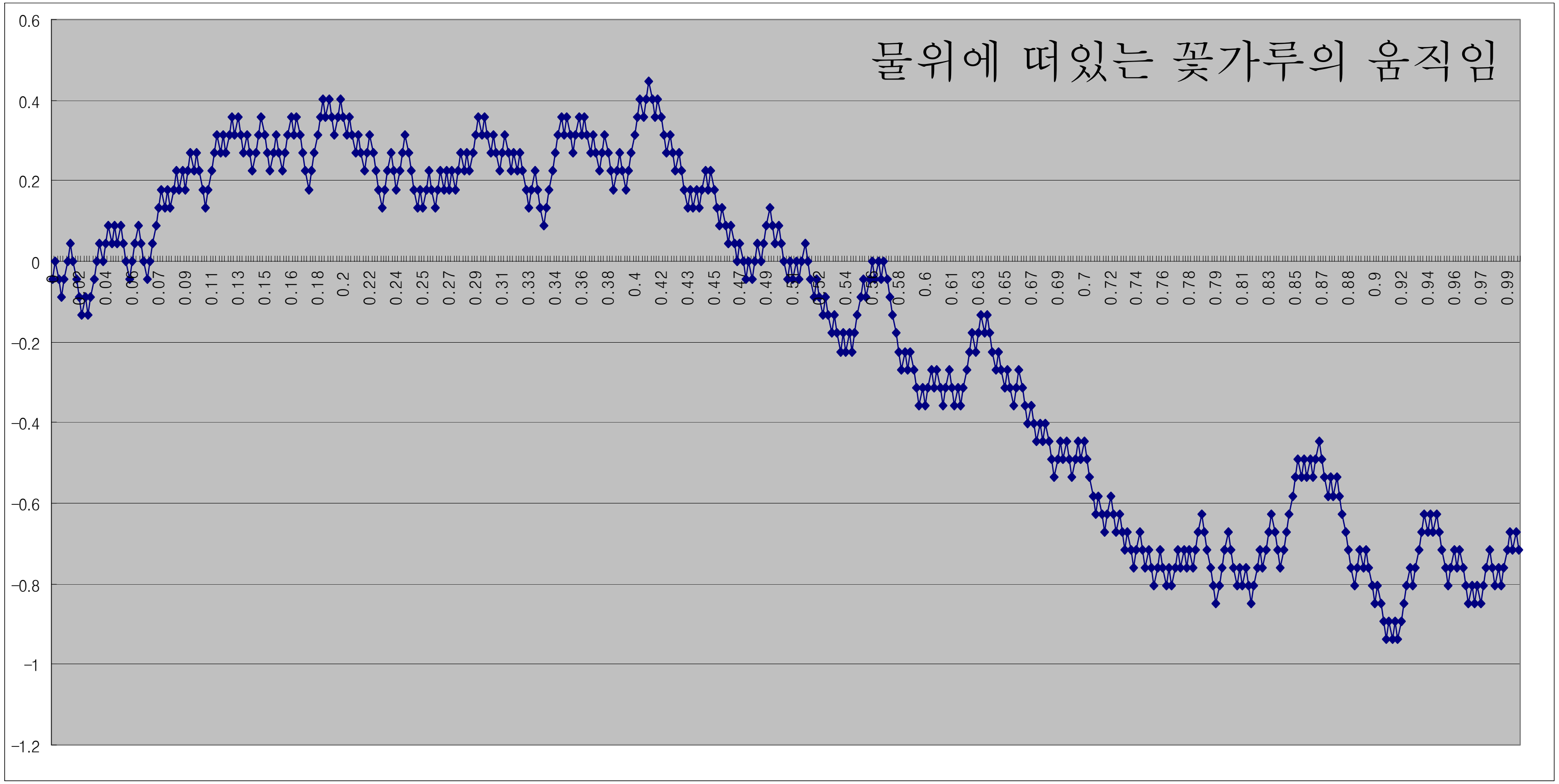


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0.01
0.04
0.07
0.1
0.13
0.16
0.19
0.22
0.25
0.28
0.31
0.34
0.37
0.4
0.43
0.46
0.49
0.52
0.55
0.58
0.61
0.64
0.67
0.7
0.73
0.76
0.79
0.82
0.85
0.88
0.91
0.94
0.97
1
계열1

n=500

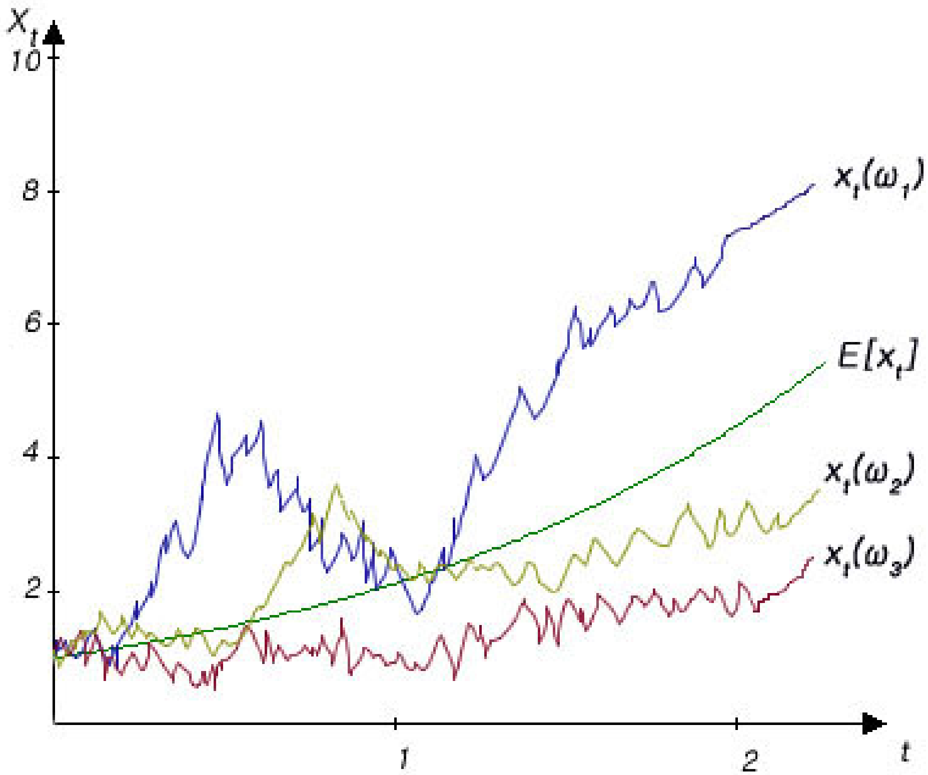


브라운 운동 : 가장 전형적인 연속시간에 대한 확률과정



기초자산 가격의 움직임을 나타내는 수학적 모델

Geometric Brownian motion(주가, 환율 등을 모델링 함)



감사합니다!!!